

Solutions des récréations scientifiques

1. OÙ VA LA PERLE ?

Soit a l'arc séparant la perle du point bas du cercle. Sur la tangente au cercle, le poids de la perle a une composante $mg \sin a$ tendant à réduire a ; la force centrifuge a une composante $m\omega^2 R \sin a \cos a$ tendant à éloigner la perle de Oy . D'où le bilan $m \sin a (g - R\omega^2 \cos a)$ vers le bas.

Sont ainsi des positions d'équilibre : le point bas ($a = 0$), le point haut ($a = \pi$), et, si $\omega > \sqrt{g/R}$, le point $a = \arccos(g/R\omega^2)$.

Stabilité : le bilan des forces au voisinage des positions d'équilibre montre que le point haut est instable ; le point intermédiaire, quand il existe, est stable ; le point bas est instable si $\omega > \sqrt{g/R}$, stable sinon.

2. CARRÉS À RALLONGE, PROPOSÉ

PAR D. INDJOUJIAN (X41)

a/ Le nombre de $2n$ chiffres : n chiffres 4, $n - 1$ chiffres 8 et un chiffre 9, est le quotient par 9 du nombre écrit avec les chiffres 4, 4 et 1, séparés par deux blocs de $n - 1$ zéros. Ce dernier est le carré du nombre $2 \cdot 10^n + 1$. Le nombre initial est donc le carré du nombre $(2 \cdot 10^n + 1) / 3$, qui s'écrit avec un chiffre 7 précédé par $n - 1$ chiffres 6.

b/ $N = 10^m - 1$ a pour carré $N^2 = 10^{2m} - 2 \cdot 10^m + 1$, qui s'écrit avec $m - 1$ chiffres 9, un chiffre 8, $m - 1$ zéros et un chiffre 1. La somme des chiffres de N^2 est $9m$, comme la somme des chiffres de N .

De manière analogue, on trouve $18m$ pour somme des chiffres de N^3 , de même que pour la somme des chiffres de N^4 .

3. SOLUTION UNIQUE

Pour $a > 1$, la fonction $y = a^x$ est croissante, de pente $a^x \ln a$.

Coupons la courbe par la droite $y = x$, le point d'intersection est unique si cette droite est tangente, d'où l'égalité des pentes $a^x / x = a^x \ln a = 1$, puis $\ln a^x = x \ln a = 1$, $x = a^x = e^{x \ln a} = e$, $\ln a = 1/x = 1/e$, $a = e^{1/e} = 1,44466786\dots$

POST-SCRIPTUM À « BICOLORATION »

(LA JAUNE ET LA ROUGE DE MAI 2022)

Avec $ABCDEFGH$ heptagone rouge, de même que les diagonales AE , BG , CF , les 11 autres diagonales étant jaunes, il y a seulement 3 triangles unicolores : ABG rouge, BDF et CEG jaunes.

POST-SCRIPTUM À « CENTRES ET BARYCENTRE »

(LA JAUNE ET LA ROUGE D'OCTOBRE 2022)

Par inadvertance, j'ai repris le mois dernier ce problème déjà proposé en février 2013. Néanmoins vous y trouvez une preuve différent de celles données en 2013, accessibles sous la référence D10442 sur le site *diophante.fr* de notre camarade Philippe Fondanaïche (X63).