

Solutions des récréations scientifiques

1. FRACTIONS RANGÉES

Formons le développement en fraction continue de la fraction

$$\frac{1794}{2022} = \frac{299}{337} = \frac{1}{1+} \frac{1}{7+} \frac{1}{1+} \frac{1}{6+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+}$$

(Par convention, à partir de la droite, chaque expression s'ajoute au dénominateur la précédant immédiatement.)

Les fractions (appelées réduites) formées en ne prenant qu'une partie à partir de la gauche sont $1/1$, $7/8$, $8/9$, $55/62$, $63/71$, $118/133$, $181/204$, $299/337$. Elles encadrent la valeur finale en s'en rapprochant. Pour un encadrement encore plus serré, je remplace le dernier dénominateur du développement (1) par une fraction p/q voisine de 1. L'expression prend alors la valeur

$$\frac{181p + 118q}{204p + 133q} = \frac{299}{337} + \frac{p - q}{337(204p + 133q)}$$

On obtient les plus petits écarts (environ $3 \cdot 10^{-9}$) avec $|p - q| = 1$ et $204p + 133q$ aussi proche que possible de 999999. Cela se produit quand p/q est $2966/2967$ ou $2967/2966$, conduisant à l'encadrement $886952/999675 < 1794/2022 < 887015/999746$.

2. BICOLORATION

Le minimum est 4 triangles unicolores. Par exemple, si $ABCDEFGH$ est un heptagone convexe, au périmètre rouge ainsi que les diagonales BG , CF , DF , les 11 autres diagonales étant jaunes, on a un triangle jaune CEG , et trois triangles rouges ABG , CDF , DEF .

3. FONCTION À DÉMASQUER, PROPOSÉ PAR OLIVIER BAUDEL (75)

Le système $2f(x) + 3f(2022/x) = 5x$, $2f(2022/x) + 3f(x) = 10110/x$ se résout en $f(x) = 6066/x - 2x$, d'où $f(6) = 999$.