© sharaku1216

Solutions des récréations scientifiques

1. TANGENTES À QUATRE

Les centres de ces sphères sont équidistants des 4 plans de faces du tétraèdre *ABCD*. Pour chaque paire de faces, chacun de ces points appartient à un des plans bissecteurs du dièdre formé par ces faces. Considérons ainsi les plans bissecteurs du dièdre formé par les plans *DCA* et *DAB*, ils ont pour traces sur le plan *ABC* deux droites passant par *A*, l'une coupant le segment *BC*, l'autre extérieure au triangle *ABC* ; de même pour les dièdres *DAB* + *DBC* et *DBC* + *DCA*. Les 6 traces se coupent en quatre points : I, I_A sur le plan bissecteur « intérieur » du dièdre *DCA* + *DAB*, I_B, I_C sur l'autre plan bissecteur de ce dièdre. Les quatre droites DI, DI_A, DI_B, DI_C sont le lieu des points équidistants des trois faces passant par *D*. Les plans bissecteurs du dièdre *DBC* +*ABC* coupent ces droites en 8 points qui sont les centres des sphères cherchées, leurs distances au plan *ABC* étant les mêmes qu'aux autres plans.

2. BIEN VU ?

Tout entier positif est somme de quatre carrés au plus : cette proposition de Fermat a été prouvée par Lagrange. Ceux pour qui trois carrés ne suffisent pas sont de la forme $4^q(8r - 1)$, comme l'ont montré Gauss et Legendre : théorème nullement élémentaire, mais que Catalan devait connaître.

Comme le sextuple d'un entier impair est de la forme $12m + 6$, il n'est ni multiple de 4, ni multiple de 8 diminué de 1 ; il est donc somme de trois carrés au plus (dont deux carrés impairs, en raison de son reste 2 modulo 4). L'observation de Catalan est qu'on peut trouver une somme incluant un carré pair non nul.

Si le nombre $12m + 6$ est somme de deux carrés seulement, les racines de ces carrés sont des multiples de 3, soit $3a$ et $3b$ (positifs impairs) ; sinon, la somme ne serait pas multiple de 3 car un carré non multiple de 3 a un reste 1 modulo 3. On forme ensuite les 3 carrés non nuls du « théorème empirique » par l'identité $12m + 6 = (3a)^2 + (3b)^2 = (2a + 2b)^2 + (a - 2b)^2 + (b - 2a)^2$, avec les racines $2a + 2b$, $|a - 2b|$, $|b - 2a|$, strictement positives.

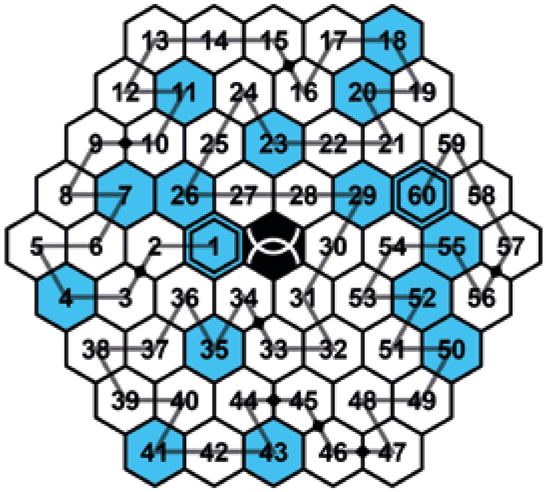
Solutions du bridge

On connaît 3 cartes en sud : ♠R ♥A ♦ A ; il faut faire au moins une levée à ♦ donc on prend ♣ du R et ♦ pour le 9 (on espère le 10 ou la D en nord), ensuite on jouera ♠ pour la D et ♦ de nouveau ; vous perdez 2 ♦ 1 ♠ 1 ♥ ; 3SA =.

Nord	
♠	V 4 3
♥	V 8 6
♦	D 3
♣	V 10 9 7 3

Sud	
♠	R 10 9
♥	A 7 3 2
♦	
♣	8 2

Solution du Rikudo



Solution du Kakuro

	5	1	3				7	6
	6	3	1	2	4		2	4
	1	8	6	4	2	9	5	7
	4	6	2	8	7	5	3	1
	7	4	5	3	1	2	9	8
	9	7	4	1	8	3	6	5
	2	5		5	3	4	1	2
	3	2				1	4	3