ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

CONCOURS D'ADMISSION 2016 – FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

SESSION PRINTEMPS 2016

PHYSIQUE

(Durée : 2 heures)

Les trois problèmes sont indépendants. Si vous n'arrivez pas à traiter une question, nous vous recommandons d'accepter le résultat de cette question et de passer à la question suivante. Les différentes questions sont largement indépendantes.

L'usage de la calculette est interdit.

I. Taille des molécules

On cherche à évaluer la taille d'une molécule à partir de la chaleur latente de vaporisation (L) et de la tension superficielle (γ) du liquide pur.

On note M la masse molaire du liquide pur et ε l'énergie d'interaction d'une molécule avec toutes les autres molécules du liquide. On suppose que les molécules sont des sphères de diamètre d, qui interagissent par un potentiel à longue portée, de telle sorte que l'interaction entre deux molécules séparées d'une distance r>d s'écrit :

$$U(r) = \frac{A}{r^n}$$

1) A quelle condition sur n l'énergie ε est-elle définie ? (indication : exprimer l'énergie d'interaction d'une molécule avec toutes les autres molécules du liquide occupant un volume macroscopique).

   Dans la suite du problème on supposera pour simplifier que les molécules sont disposées aux nœuds d'un réseau cubique simple, dont la maille élémentaire est un cube de côté d.

2) Exprimer la masse volumique du liquide en fonction de la masse molaire M, du diamètre d et du nombre d'Avogadro N_A.

3) On note L la chaleur latente massique du liquide (variation d'enthalpie lors de la transformation d'un kg de liquide en vapeur). Exprimer L en fonction de ε, M et N_A.

4) La tension superficielle γ est définie de la façon suivante : si la surface libre du liquide (interface liquide-air) varie d'une quantité dA, alors la variation correspondante de l'énergie interne du liquide s'écrit :

$$dU = \gamma dA$$

5) Exprimer γ en fonction de ε et d.

6) En déduire que :

$$d = \frac{2\gamma}{\rho L}$$

7) On donne le tableau suivant :

	ρ g/cm³	γ 10^{-3}N/m	L kJ/kg
eau	1	73	2265
mercure	13,5	450	295
octane	0,703	22	298
glycérol	1,26	63	974

Donner les valeurs correspondantes des diamètres des molécules. Conclure.

II. Modélisation d'une fuite de gaz

Notations et rappels :

(i) constante de Boltzmann : k_B

(ii) densité particulaire du gaz : n (nombre de molécules par unité de volume)

(iii) masse moléculaire du gaz : m (masse d'une molécule du gaz)

(iv) $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.4$ pour un gaz diatomique avec C_v (resp. C_p) la capacité thermique massique à volume constant (resp. pression constante)

(v) vitesse du son dans un gaz parfait : $c = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}}$

(vi) vitesse moyenne des molécules dans un gaz parfait : $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$

Une enceinte, placée dans le vide, contient initialement un gaz parfait à la pression P et la température T. A l'instant t=0, on perce un trou de diamètre D dans la paroi de l'enceinte.

1) On note λ le libre parcours moyen des molécules du gaz. Que représente le libre parcours moyen ? On rappelle que, pour un gaz de densité particulaire n, dont les

molécules peuvent être assimilées à des sphères dures de diamètre d, le libre parcours moyen s'écrit :

$$\lambda \simeq \frac{1}{nd^2}$$

Exprimer n en fonction de P et T.

Dans toute la suite on admettra que l'épaisseur L de la paroi de l'enceinte est égale à λ.

2) On suppose d'abord que D < λ (« régime de Knudsen »). Estimer le débit massique Q_m de la fuite de gaz. On négligera la variation de pression et de température du gaz dans l'enceinte due à la fuite. On supposera de plus pour simplifier qu'un sixième des molécules du gaz présentes près de l'orifice ont une vitesse dirigée vers l'extérieur selon la normale à l'orifice et dont la norme est égale à la vitesse moyenne $\bar{v}$ des molécules.
   Comment varie le débit massique avec D ?

On se place désormais dans le cas plus général où le gaz parfait est également présent à l'extérieur de l'enceinte : les gaz à l'intérieur et à l'extérieur de l'enceinte sont à la même température T ; le gaz à l'intérieur est à la pression P + ΔP et celui à l'extérieur à la pression P.

3) Que devient le débit de fuite ?

4) On suppose maintenant que λ < D (« régime de Poiseuille »). Le gaz peut alors être considéré comme un fluide visqueux et on rappelle que la viscosité dynamique d'un gaz parfait est donnée par l'équation :

$$\eta = \frac{1}{3} n m \bar{v} \lambda$$

   Si D est inférieur à une valeur seuil D_{max}, dont la valeur sera précisée à la question suivante, l'écoulement est de type laminaire à travers le pore de diamètre D et de longueur L. Dans ce cas, la résistance hydraulique R_H, définie par

$$R_H = \frac{\Delta P}{Q_v}$$

   où ΔP est la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de l'enceinte et Q_v le débit volumique de gaz, s'écrit :

$$R_H = \frac{128 \eta L}{\pi D^4}$$

   Calculer le débit massique de la fuite en fonction de ΔP, $\bar{v}$, n, d, L et D. Comment varie-t-il maintenant avec D ?

5) On rappelle que l'écoulement est laminaire tant que le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{< v > D}{\eta}$$

est inférieur à 2000. $< v >$ désigne ici la vitesse d'écoulement du gaz moyennée sur une section du pore. Calculer $< v >$ et en déduire la valeur de D_{max}.

6) On suppose enfin que $D > D_{max}$ (régime de Bernoulli). On rappelle que le premier principe généralisé (pour un sysème ouvert) s'écrit alors :

$$h + \frac{1}{2}v^2 = cte$$

où h est l'enthalpie massique du gaz et v la vitesse du jet de gaz, supposée constante dans toute la section du pore. On rappelle également que $h = C_pT + cte$. On supposera que l'écoulement est assez rapide pour être considéré adiabatique et assez lent pour être considéré quasistatique. Justifier ces hypothèses.
On a alors l'équation de Laplace : $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cte$. Montrer que la vitesse v du jet satisfait l'équation :

$$1 + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{P + \Delta P}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

En déduire le débit massique de la fuite. Comment varie-t-il avec D ? Pour quelles valeurs de la différence de pression ΔP l'ouverture brutale du trou se traduit-elle par une détonation?

7) Tracer l'allure du débit massique Q_m en fonction du diamètre D du trou dans le cas général. On précisera les valeurs du diamètre D correspondant aux transitions entre les régimes de Knudsen et de Poiseuille, d'une part, et de Poiseuille et de Bernoulli, d'autre part.

III. Mouvement d'une particule chargée

Une particule ponctuelle de masse m et de charge q est soumise à un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$, tous deux constants et uniformes. On suppose de plus que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux (voir Figure). Dans ce problème, on néglige tous les effets relativistes.

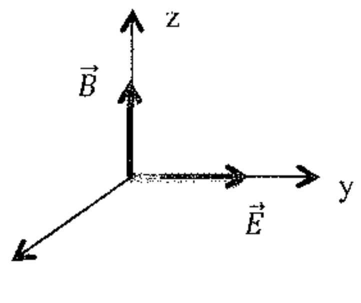

Figure : disposition relative des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

1) Ecrire l'équation du mouvement de la particule.

2) Résoudre cette équation pour la vitesse dans le cas le plus général. On supposera pour simplifier que la vitesse initiale (vitesse au temps t=0), notée $\vec{V}$, est orthogonale à $\vec{B}$.

3) Exprimer la vitesse moyenne $\vec{U}$ en fonction des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Retrouver ce résultat en effectuant un changement de référentiel (se placer dans le référentiel en translation à la vitesse moyenne $\vec{U}$).

4) Décrire le mouvement de la particule et tracer les différentes allures possibles de la trajectoire en fonction du rapport $\frac{VB}{E}$ où V est la vitesse initiale de la particule. Quelle est la nature de la trajectoire quand $V = 0$?

5) A quelle condition sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pouvait-on négliger les effets relativistes ?