CONCOURS D'ADMISSION 2016 – FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE
SESSION DE PRINTEMPS

MATHÉMATIQUES

(Durée : 2 heures)

* * *

Ce sujet est composé de quatre exercices. On peut les traiter dans *n'importe quel ordre.* Il n'est pas nécessaire de résoudre tous les exercices pour obtenir la note maximale.

D'une façon générale, la difficulté des questions est une fonction croissante de leur numéro de sorte que *les questions finales sont les plus dures.* On ne doit donc pas consacrer trop de temps aux dernières questions d'un exercice avant d'avoir résolu les premières questions des autres.

Dans la résolution d'un exercice donné, on peut toujours utiliser le résultat des questions précédentes *(même si on ne les a pas résolues).*

Toute affirmation doit être *clairement* et *complètement* justifiée.

I. Matrices à diagonale solide

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est à diagonale solide si les éléments de sa diagonale sont ses valeurs propres (avec mêmes multiplicités). On note $\mathcal{D}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ composé de toutes les matrices à diagonale solide.

1) Identifier $\mathcal{D}_1$.

2) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice à diagonale solide.

3) Identifier $\mathcal{D}_2$. Cet ensemble est-il ouvert ? fermé ? connexe par arcs ? convexe ?

4) Pour n un entier donné, l'ensemble de toutes les matrices à diagonale solide $\mathcal{D}_n$ est-il un espace vectoriel ?

5) Déterminer les matrices symétriques réelles M appartenant à $\mathcal{D}_n$. (Indication : on pourra introduire la quantité $\mathrm{tr}({}^tMM)$).

II. Étude d'une suite

Soit c un nombre réel positif et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + cn}.$$

1) Trouver un réel σ tel que pour tout entier $n \geq 1$, on ait $u_n \leq \sigma\sqrt{n}$.

2) Trouver un équivalent de u_n, lorsque n tend vers l'infini, de la forme $u_n \sim \alpha n^\beta$ (où α et β sont des nombres réels).

3) Calculer la limite de $u_n - \alpha n^\beta$ lorsque n tend vers l'infini.

III. Polynômes homogènes

Pour n un entier strictement positif quelconque, on note $\mathcal{H}_n \subset \mathbb{R}[X,Y]$ l'ensemble des polynômes homogènes à coefficients réels de degré n en deux variables (X et Y) : on rappelle qu'il s'agit des polynômes P ayant la propriété que $P(\lambda X, \lambda Y) = \lambda^n P(X,Y)$ quel que soit le réel λ.

On note $\mathcal{D}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}_n$ composé des polynômes divisibles par $X^2 + Y^2$ et par $\mathcal{L}_n$ celui des polynômes P de $\mathcal{H}_n$ tels que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = 0.$$

1) Démontrer que, quel que soit l'entier n, $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{L}_n$ sont des espaces vectoriels.

2) Démontrer que tout polynôme de $\mathcal{H}_n$ peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} c_k X^k Y^{n-k}$$

où les c_k sont des réels ? Quelle est la dimension de $\mathcal{H}_n$?

3) Quelles relations doivent vérifier les coefficients de P si $P \in \mathcal{L}_n$?

4) Déduire de la question 3) une base de $\mathcal{L}_n$.

5) Démontrer que $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{L}_n = \{0\}$.

6) Démontrer que $\dim \mathcal{D}_n = \dim \mathcal{H}_{n-2}$.

7) Démontrer que $\mathcal{D}_n \oplus \mathcal{L}_n = \mathcal{H}_n$.

IV. Étude d'une série entière

1) Pour quels entiers n a-t-on $\sin(n\pi\sqrt{5}) = 0$?

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{5})}$.

2) Démontrer que $R \leq 1$.

3) Démontrer que, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a : $\sin t \geq t - t^3/6$.

4) Démontrer que quels que soient les entiers p et q, non nuls simultanément, on a

$$|p\sqrt{5} - q| \geq \frac{1}{p\sqrt{5} + q}.$$

5) En utilisant les questions 3) et 4), trouver un réel $c > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait

$$|\sin(n\pi\sqrt{5})| \geq \frac{c}{n}.$$

6) Que vaut R ?