SOLUTIONS DES RÉCRÉATIONS SCIENTIFIQUES

1) TRIGO MAIS SI PEU

Groupant autrement les termes de l'équation, on a les inégalités $|\sin(6x) + \cos(4x)| \leq 2 \leq |\tan(7x) + \cot(7x)|$, qui ne peuvent devenir égalités que si x est multiple impair de $\pi/4$. Comme les 4 termes admettent π comme période, il suffit de tester $x = \pi/4$ (qui est solution, de même que $\pi/4 + k\pi$) et $x = 3\pi/4$ (qui ne l'est pas).

2) OBSCUR COMME BOURBAKI

On prétend qu'au chapitre 1 du traité de Bourbaki, une note indique « la signification du symbole 1 sera définie au chapitre 3 ». Oublions donc la signification du 1 de la récurrence et écrivons, en faisant $n = m$ puis $n = m + 1$

$1 = u_{m+1}u_{m-2} - u_m u_{m-1} = u_{m+2}u_{m-1} - u_{m+1}u_m$.

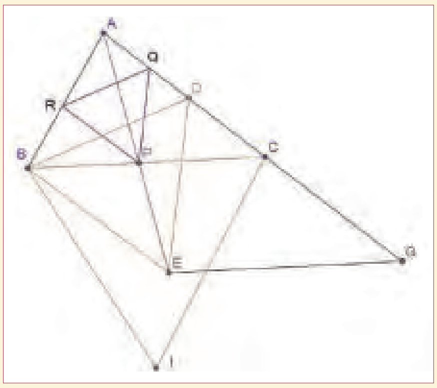
Cela se réarrange en $u_{m+1}(u_m + u_{m-2}) = u_{m-1}(u_m + u_{m+2})$.

Posons $u_{n+1} + u_{n-1} = u_n v_n$. La condition ci-dessus donne $v_{m+1} = v_{m-1}$ donc v_n ne dépend que de la parité de n et $v_n v_{n+1}$ est une constante.

$u_{n+2} + 2u_n + u_{n-2} = (u_{n+1} + u_{n-1})\, v_{n+1} = u_n v_n v_{n+1}$.

La sous-suite des termes de rang pair comme la sous-suite des termes de rang impair obéissent à une récurrence $u_{n+2} = (v_n v_{n+1} - 2)\, u_n - u_{n-2}$, qui se résout classiquement avec les polynômes de Tchebychev $T_k(v_n v_{n+1}/2 - 1)$. Il y aura des termes non entiers si et seulement si $v_n v_{n+1}$ n'est pas entier, c'est-à-dire si $(u_1 + u_3)(u_1 u_2 + u_2 u_3 + 1)$ n'est pas multiple de $u_1 u_2 u_3$.

3) INSCRIPTION ÉQUILATÉRALE



Une homothétie de rapport AB/AR transforme le triangle PQR en EDB avec $AE/AP = AD/AQ = AB/AR = AG/AC$, si la parallèle à BC menée par E coupe AC en G.
Soit BIC le triangle équilatéral de même sens que PQR, une rotation de centre D et d'angle $\pi/3$ amène B en E et la droite BI sur la droite EG. C est à la même distance de ces deux droites.
Rappelons que l'aire d'un quadrilatère est le demi-produit d'une diagonale par la projection de l'autre diagonale sur une perpendiculaire à la première.
Ainsi aire $IBD = (1/2)BD$. projection de BI perpendiculairement à $BD = (1/2)BI$. distance de D à $BI = (1/2)BC$. distance de D à EG = aire GBD (il en résulte que IG est parallèle à BD).
Ajoutant l'aire de ABD, aire ABG = aire $IBAD = (AG/AC)$ aire ABC (ABC et ABG ont même hauteur issue de B).
La projection de BD perpendiculairement à AI est (AG/AC) fois la projection de QR perpendiculairement à AI ; ainsi aire $IRAQ = (AC/AG)$ aire $IBAD$ = aire ABC.
Quel que soit PQR, la projection de QR perpendiculairement à AI est $(2/AI)$ aire ABC. QR sera minimum quand il coïncide avec cette projection, donc quand il est perpendiculaire à AI. Pour le construire, tracer BD perpendiculaire à AI, E formant avec B et D un triangle équilatéral, P intersection de AE et BC, PQ et PR parallèles à ED et EB.

SOLUTIONS DU BRIDGE

Le roi de ♠ est en Sud, on prend l'As de ♠, on élimine les atouts en trois tours en gardant le 3 de ♥ au mort et le 4 en main, on donne 4 coups de ♣ en coupant du 7 de ♥ et on rejoue ♠. Sud en main livre le coup.

NORD

♠	10 9 8 7 4
♥	V 10 6
♦	8 5 3 2
♣	9

SUD

♠	R 2
♥	5
♦	R V 10 7
♣	V 10 7 6 5 3

Remarque
Si Sud a encore un ♠, on rentre au 4 de ♥ pour faire l'impasse ♦.

AU COURRIER

SOUVENIRS D'ANCIENS

Le courrier de Georges Lacroix (43) dans la rubrique Magnan du numéro d'août-septembre dernier est intéressant mais appelle une remarque concernant le STO et la direction d'alors de l'École. Celle-ci ne décourageait pas les élèves de participer au STO, loin de là, comme en témoigne l'un des rares élèves qui ont préféré alors partir en Afrique du Nord, André Bénard (42). Le sous-gouverneur Tarlé (19) rappelait aux élèves les règles du jeu : « le STO pour la relève des prisonniers et la survie de l'École », comme en témoignent dans leur ouvrage (*Témoins de la fin du IIIe Reich – Des polytechniciens témoignent*, L'Harmattan 2004) des camarades partis en Allemagne dans le cadre du STO. L'historien Philippe Burrin écrit quant à lui (ouvrage collectif *Le Choix des X*, dir. Marc-Olivier Baruch (75) et Vincent Guigueno (88), Fayard 2000) que l'École des mines et l'École polytechnique avaient fourni « des groupes entiers d'élèves pour le STO – dans le cas de la seconde presque tous ses élèves » (p. 80).
Ce point à caractère historique méritait d'être souligné. ■

Bernard Esambert (54),
président d'X-Résistance